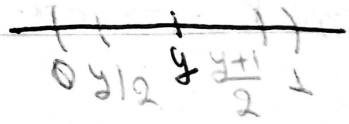
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$f_n(x)=x^n$, $x\in(0,1)$. Η $f_n \xrightarrow{κ.σ.} 0$, $x\in(0,1)$ και (f_n) δε συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x)=0$ στο $(0,1)$. Εάν $y\in(0,1)$ $|f_n(y)-f(y)|<\varepsilon$ εάν $n>\frac{\log\varepsilon}{\log y}$ οπότε $N_\varepsilon(y)=\left[\frac{\log\varepsilon}{\log y}\right]+1$



Έστω $V(y) = \left(\frac{y}{2}, \frac{y+1}{2} \right)$

Εξετάζουμε εάν $\sup\{N_\varepsilon(x) : x \in V(y) \cap A\} < +\infty$

Έστω $g(x) = \frac{\log \varepsilon}{\log x}$, $x \in (0,1)$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $g'(x) = \frac{\log \varepsilon}{x(\log x)^2}$

Εάν λοιπόν $0 < \varepsilon < 1$ τότε $\log \varepsilon < 0$

Οπότε $g'(x) = -\frac{\log \varepsilon}{x(\log x)^2} > 0 \ \forall x \in (0,1)$

Συνεπώς, $\forall x \in \left(\frac{y}{2}, \frac{y+1}{2} \right)$, $g(x) \leq \frac{\log \varepsilon}{\log\left(\frac{y+1}{2}\right)}$

Οπότε, $\sup\{N_\varepsilon(x) : x \in V(y) \cap A = \left[\frac{\log \varepsilon}{\log\left(\frac{y+1}{2}\right)} \right] + 1 < +\infty$

Πρόταση

Μια ακολουθία $(f_n) \subseteq F(A, \mathbb{R})$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση f στο A ανν $(\forall \varepsilon > 0)(\exists k > 0)$ τ.ω. $N_\varepsilon(x) \leq k$, $\forall x \in A$

Απόδειξη

$(\Rightarrow)$: Έστω $f_n \to f$ στο A ομοιόμορφα $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in A$. Οπότε εάν $x \in A$, τότε $N_\varepsilon(x) \leq n_0$ (διότι $N_\varepsilon(x)$ το min).
Άρα $(\forall x \in A)$ έχουμε $N_\varepsilon(x) \leq n_0$. Οπότε αρκεί να πάρουμε $k = n_0$

$(\Leftarrow)$ Έστω $(\forall \varepsilon > 0)(\exists K > 0)$ τ.ω. $N_\varepsilon(x) \leq K$ $\forall x \in A$. Θδο $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$ στο A.
Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Τότε εάν $n_0 = [K] + 1$ έπεται ότι:
$N_\varepsilon(x) \leq K \leq n_0$, $\forall x \in A$. Εάν $n \geq n_0 > N_\varepsilon(x)$ τότε $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
Άρα $f_n \to f$ ομ. στο A

Κριτήριο Ομοιόμορφης Σύγκλισης

Εάν $(f_n) \subseteq F(A, \mathbb{R})$ και $f \in F(A, \mathbb{R})$, $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$ στο A και $\sup\{N_\varepsilon(x) : x \in A\} = +\infty$. Τότε η (f_n) δε συγκλίνει ομ. στην f

στο σύνολο A

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $f_n(x)=x/n$, $n\in\mathbb{N}$, $(0,+\infty)$. Να εξετάσετε εάν η ακολουθία (f_n) συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση f ομοιόμορφα στο σύνολο $(0,+\infty)$

Εάν $f(x)=0$, $x\in(0,+\infty)$ οπότε $f_n \xrightarrow{\kappa\sigma} f$ στο $(0,+\infty)$.

Έστω $\varepsilon>0$ τότε $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x}{n}\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{x}{n}<\varepsilon \Rightarrow \frac{x}{\varepsilon}<n$

Οπότε $N_\varepsilon(x)=\left[\frac{x}{\varepsilon}\right]+1$, $\sup\{N_\varepsilon(x): x\in(0,+\infty)\}=+\infty$

$x-1\leq[x]$. Άρα (f_n) δε συγκλίνει ομοιόμορφα στο f στο $(0,+\infty)$

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$, $x\in(0,1)$, $n\in\mathbb{N}$. Να εξετάσετε εάν η (f_n) συγκλίνει (κ.σ. και ομ/φα) στο $(0,1)$

Εφόσον, $x\in(0,1)$, $\lim_n x^n=0$ $\forall x\in(0,1)$ οπότε $f_n\to 0$ κ.σ. στο $(0,1)$.

Εξετάζουμε για το αν η σύγκλιση της (f_n) στο $f(x)=0$, $x\in(0,1)$ είναι ομοιόμορφη. Έστω $0<\varepsilon<1/2<1$. Τότε, εφόσον,

$N_\varepsilon(x)=\min\{\mu: n\geq\mu \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\}=$

$=\min\left\{\mu: n\geq\mu \Rightarrow \left|\frac{x^n}{1+x^n}\right|<\varepsilon\right\}=$

$=\min\left\{\mu: n\geq\mu \Rightarrow \frac{x^n}{1+x^n}<\varepsilon\right\}$

Για $x\in(0,1)$ έχουμε $\frac{x^n}{1+x^n}<\varepsilon \Rightarrow x^n<\varepsilon(1+x^n) \Rightarrow x^n-\varepsilon x^n<\varepsilon \Rightarrow$

$(1-\varepsilon)x^n<\varepsilon \Rightarrow x^n<\varepsilon/1-\varepsilon \Rightarrow \log x^n<\log\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) \Rightarrow$

$n\log x<\log\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \Rightarrow n>\frac{\log(\varepsilon/1-\varepsilon)}{\log x}$

[Εφόσον $\varepsilon<1/2$ το $(\varepsilon/1-\varepsilon)<1$ και $\log(\varepsilon/1-\varepsilon)<0$]

$N_\varepsilon(x) = \left[\frac{\log(\varepsilon/1-\varepsilon)}{\log x}\right] + 1$. Εξετάζουμε αν $\sup\{N_\varepsilon(x) : x \in (0,1)\}$

$\lim_{x\to 1^-} \log x = 0$, οπότε $\sup\{N_\varepsilon(x) : x\in(0,1)\} = \sup\left\{\left[\frac{\log(1/1-\varepsilon)}{\log x}\right]+1, x\in(0,1)\right\} = +\infty$

Άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $(0,1)$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $f, (f_n) \subseteq F(A,\mathbb{R})$ και $f_n \to f$ ομ/φα στο A. Εάν $(x_n) \subseteq A$ και ισχύει $\lim_n f(x_n) = \ell \in \mathbb{R}^*$, τότε και το $\lim_n f_n(x_n)$ $\exists$ και ισχύει $\lim_n f_n(x_n) = \ell$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $f_n \to f$ ομ/φα στο A και για κάποια $(x_n) \subseteq A$, $\lim_n f(x_n) = \ell$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις για το ℓ.

i) $\ell \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε εφόσον $f_n \to f$ ομ/φα $\exists n_1 \in \mathbb{N}$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$, $\forall n \geq n_1$ (*). Επίσης, εφόσον $f(x_n) \to \ell$ $\exists n_2 \in \mathbb{N}$: $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon/2$ $\forall n \geq n_2$. Επιλέγοντας $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε $|f_n(x_n) - \ell| \leq |f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) - \ell| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - \ell| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Άρα $\lim_n f_n(x_n) = \ell$

ii) Έστω $\ell = +\infty$. Τότε για $\varepsilon > 0$, $\exists n_3 \in \mathbb{N}$: $\boxed{f(x_n) > \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon, \forall n \geq n_3}$ (*1)

Οπότε για $n_0' = \max\{n_1, n_3\}$ έχουμε $f_n(x_n) = f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) \geq -|f_n(x_n) - f(x_n)| + f(x_n) > -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$

Άρα $\lim_n f_n(x_n) = +\infty = \lim_n f(x_n)$

iii) Έστω $\ell = -\infty$, δηλ. $\lim_n f(x_n) = -\infty$. Άρα $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_4 \in \mathbb{N})$:

$f(x_n) < -1/\varepsilon - \varepsilon$ $\forall n \geq n_4$. Οπότε επιλέγοντας $n_0'' = \max\{n_1, n_4\}$, έχουμε $f_n(x_n) = f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + f(x_n) \leq \frac{1}{\varepsilon}$

Άρα $\lim_n f_n(x_n) = -\infty = \lim_n f(x_n)$

Κριτήριο Ομοιόμορφης Σύγκλισης (2ο)

Εάν $f, (f_n) \subseteq F(A,\mathbb{R})$ και $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$ στο A και για κάποια ακολουθία $(x_n) \subseteq A$ το $\lim_n f(x_n) = \ell$ υπάρχει στο $\mathbb{R}^*$, ενώ το

$\lim_n f_n(x_n)$ δεν υπάρχει ή υπάρχει και είναι διαφορετικό του ℓ, τότε η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Παράδειγμα

Έστω $f_n(x) = \dfrac{nx^5+n^4x^2+n^5x}{n^6+x^6}$, $x \geq 0$. Να εξετάσετε αν η (f_n)

συγκλίνει (κ.σ. και ομοιόμορφα) σε κάποιο f στο $[0,+\infty)$

Εάν $x=0$, τότε $f_n(x) = f_n(0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Άρα $\lim_n f_n(0) = 0$

Εάν $x \in (0,+\infty)$, τότε $\lim_n f_n(x) = 0$. Άρα, εάν $f(x)=0$, $x \in [0,+\infty)$,
τότε $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$ στο $[0,+\infty)$

Εάν $x_n = n$, $(x_n) \subseteq [0,+\infty)$ και $f(x_n) = 0$, αλλά

$$f_n(x_n) = \frac{nx^5+n^4x^2+n^5x}{n^6+x^6} = \frac{nn^5+n^4n^2+n^5n}{n^6+n^6} = \frac{3}{2}$$

Άρα $\lim_n f_n(x_n) = \frac{3}{2} \neq 0 = \lim_n f(x_n)$

Άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $[0,+\infty)$

Άσκηση

Έστω $f_n(x) = x^n \sin\dfrac{1}{1-x}$, $x \in (0,1)$. Να εξετάσετε αν η (f_n) συγκλίνει

(κ.σ. και ομ/φα) προς κάποια f στο $(0,1)$

Για $x \in (0,1)$, $\lim_n f_n(x) = \lim_n x^n \sin\dfrac{1}{1-x} = 0$. Επομένως, αν $f(x)=0$

$x \in (0,1)$ $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$ στο $(0,1)$. Όμως, αν $\dfrac{1}{1-x_n} = 2n\pi \Rightarrow$

$x_n = 1 - \frac{1}{2n\pi}$, τότε $f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{2n\pi}\right)^n \sin 2n\pi = 0$,

άρα $\lim_n f_n(x_n) = 0$. Εάν $\frac{1}{1-y_n} = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow y_n = 1 - \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$,

τότε $f_n(y_n) = \left(1 - \frac{1}{2n\pi + \pi/2}\right)^n \sin(2n\pi + \pi/2) =$

$\left(1 - \frac{1}{2n\pi + \pi/2}\right)^n \cdot 1$ και $\lim_n f_n(y_n) = \lim_n \left(1 - \frac{1}{2n\pi + \pi/2}\right)^n =$

$= \lim_n \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2n\pi + \pi/2}\right)^{-n}} = \lim_n \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2n\pi + \pi/2}\right)^{-(2n\pi + \frac{\pi}{2})}}\right)^{1/2\pi} \left(1 - \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right)^{-1/4}$

$= \frac{1}{e^{1/2\pi}} \cdot 1$.

Συνεπώς, εάν ορίσουμε $w_n = \begin{cases} x_n, & n \text{ περιττός} \\ y_n, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$

Τότε $f(w_n) = 0 \Rightarrow \lim f(w_n) = 0$, ενώ $\lim_n f_n(w_n)$ δεν υπάρχει.

Πρόταση

Έστω $(f_n) \subseteq F(A, \mathbb{R})$, $f \in F(A, \mathbb{R})$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A. Εάν γ είναι ένα σ.σ. του A και $\exists \lim_{x \to \gamma} f_n(x)$ στο $\mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και

$\lim_{x \to \gamma} f_n(x) = c_n$, τότε $\exists \lim_n c_n$ και $\exists \lim_{x \to \gamma} f(x)$ στο $\mathbb{R}$ και

είναι ίσα μεταξύ τους. Δηλαδή, $\lim_n \lim_{x \to \gamma} f_n(x) = \lim_n c_n =$

$\lim_{x \to \gamma} f(x) = \lim_{x \to \gamma} \lim_n f_n(x)$

(Δηλαδή εάν έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση μπορεί να γίνει εναλλαγή των ορίων)

Παρατηρήσεις

1) Εάν $A \subseteq \mathbb{R}$ και τ.ω. το $(\infty - \infty)$ να είναι σ.σ. του A, το συμπέρασμα της προηγούμενης πρότασης ισχύει ακόμη και αν στη θέση του γ

έχουμε το $f_{\infty}(x) - \infty$)

$f_n(x)$

$\downarrow$

$a_n(m)$

2) Εάν $A = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, τότε η προηγούμενη πρόταση ισχύει αν ανακατασταθεί το $f_n(x)$ με μια ακολουθία με δύο δείκτες $a_{nm} \subseteq \mathbb{R}$

ΑΣΚΗΣΗ Η.W

Έστω $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}$, $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$

Να εξετασθεί αν η (f_n) συγκλίνει (κ.σ. και ομοιόμορφα) σε κάποιο f στο $[0,1]$.